ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PME Departamento de Engenharia Mecânica

CEA Centro de Engenharia Automotiva

Teoremas da Dinâmica

Ronaldo de Breyne Salvagni – Março/2009

1. Teorema da Resultante (TR) (Lei de Newton)

- Para um sistema material de massa total m e baricentro G, a expressão do Teorema da Resultante é:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_G) = \vec{R}_{ext} \qquad (1\text{-}1)$$

onde $\vec{v}_G$ é a velocidade do baricentro do sistema e $\vec{R}_{ext}$ é a resultante das forças externas atuantes no sistema.

- Se a massa for constante, essa equação se reduz a:

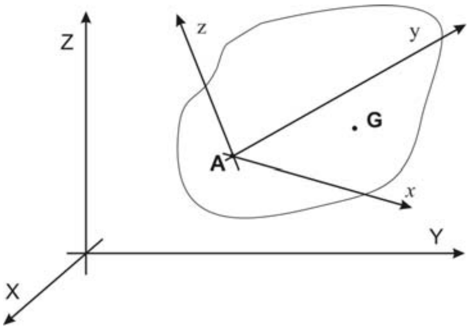
$$m\vec{a}_G = \vec{R}_{ext} \qquad (1\text{-}2)$$

2. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), ou Teorema do Momento Cinético

- Para um sistema material de massa m constante, e um pólo O qualquer, a expressão do Teorema da Quantidade de Movimento Angular é:

$$\frac{d}{dt}\vec{H}_O = m\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_{Oext} \qquad (2\text{-}1)$$

com $\vec{H}_O$ sendo a quantidade de movimento angular do sistema, $\vec{v}_G$ e $\vec{v}_O$ as velocidades do baricentro G e do ponto O, e $\vec{M}_{Oext}$ o momento resultante de todos os esforços externos ao sistema, em relação ao pólo O.



- Para um sólido, ou corpo rígido, sendo A um ponto qualquer deste sólido e adotando um sistema de coordenadas (A, x, y, z) não necessariamente solidário a este sólido, com respectivos versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, a expressão da quantidade de movimento angular deste sólido $\vec{H}_A$, em relação ao pólo A, pode ser expressa por:

$$\vec{H}_A = m(G-A)\wedge\vec{v}_A + \left(J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z\right)\vec{i} + \left(-J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z\right)\vec{j} + \\ +\left(-J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z\right)\vec{k} \qquad (2\text{-}2)$$

onde:

G é o baricentro do sólido;

$\vec{v}_A$ é a velocidade do pólo A;

ω_x, ω_y e ω_z são as componentes do vetor rotação do sólido nas coordenadas (x, y, z);

Jx, *Jy* e *Jz* são os momentos de inércia do sólido em relação aos eixos *Ax*, *Ay* e *Az*, respectivamente, e *Jxy*, *Jxz*, etc., são os produtos de inércia do sólido em relação aos respectivos pares de eixos indicados em subscrito. Pela própria definição de produtos de inércia, aqueles com mesmos subscritos são iguais, ou seja, *Jxy* = *Jyx*, etc..

OBS.:

- se o sistema de coordenadas (A, x, y, z) não for solidário ao sólido, estes momentos e produtos de inércia podem também variar com o tempo.
- se o sistema de coordenadas (A, x, y, z) tiver algum movimento de rotação, os respectivos versores $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ podem também variar com o tempo.

Alternativamente, usando notação matricial, mais compacta, podemos escrever:

$$\{H_A\} = m[GA]\{v_A\} + [J_A]\{\omega\}$$

com:

$$[GA] = \begin{bmatrix} 0 & -(z_G - z_A) & (y_G - y_A) \\ (z_G - z_A) & 0 & -(x_G - x_A) \\ -(y_G - y_A) & (z_G - z_A) & 0 \end{bmatrix};$$

$$\{v_A\} = \begin{Bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ v_{Az} \end{Bmatrix};$$

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

e a matriz de inércia (simétrica):

$$[J_A] = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$$

Ref.:

FRANÇA, L. N. F., et MATSUMURA, A. Z. - Mecânica geral, 2ª Edição, 256 pgs., Editora Edgard Blucher Ltda., 2004, São Paulo.